目录

1C

继续……无聊无聊好无聊

并当然并不总是子空间……对子空间之和的定义之所以没有提标量乘法，是因为没必要。

直和 的概念要求的是“唯一的表示”，看了一下后面的例子，这个要求似乎不能简单地换成另一种表述?

打脸了，1.45 的定理就是另一种表述。这个定理的证明其实比较显然。

其实我读直和例子之前也有 1.46 这样的猜想，可惜我读完例子之后放弃了（

嗯哼，总觉得讲的有点浅，还是做习题吧。

---

24 道题，李是真的流皮😡

习题 1，a：是，b：零元不在，不是，c：（相当于是某一位为零的空间）对加法不封闭，不是，d：是

习题 3，首先定义域是 $(-4,4)$ 的零函数在这个子空间里，然后加法和标量乘显然封闭

习题 4，首先 $b \neq 0$ 时零函数不在，然后 $b = 0$ 时，根据积分的运算法则，加法和点乘显然是封闭的。

习题 5，是。

习题 6，$\mathbb{R}$ 中显然 $a^3 = b^3$ 这样的条件就是 $a = b$，所以显然是子空间；但 $\mathbb{C}$ 中有反例 $a = 1, b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$，所以不能简化条件，那么这个空间就对加法不封闭了。

习题 7，依条件看至少有 $0 \in U$，然后呢，反例是 $0 \in U, (0,1) \in U$，它显然对标量乘法不封闭，因为 $(0,\pi) \not\in U$

习题 8，$\{(a,b) \mid a \in R, ab = 0\}$，对加法不封闭

习题 9，零函数在，对标量乘法也封闭，加法嘛，由于之前我小小的学过一些，是封闭的。加法会导致循环节长度变成 lcm 来着，用数学符号来解释的话就是由于 $f(x) = f(x+p) \Rightarrow f(x) = f(x+kp)$，推广一下就是 $f(x) + g(x) = f(x+p) + g(x+q) \Rightarrow f(x) + g(x) = f(x + \operatorname{lcm}(p,q)) + g(x + \operatorname{lcm}(p,q))$

习题 10，首先交集中有加法零元，其次若对标量乘法或者加法不封闭的话，只能导出 V_1, V_2 不是子空间的结论，就与假设冲突了。

习题 11，若交集非子空间，会导向族中某些子空间不是子空间的结论。

习题 12，反方向很好证明，现在注意力集中在“子空间的并集是子空间-> 一个包含另一个”的方向，假设 $V_1 \cup V_2$ 是子空间但不是一个包含另一个，说明同时存在 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ 使得 $v_1 \not\in V_2, v_2 \not\in V_1$，假设这俩的和在 $V_1 \cup V_2$ 中，分三种情况，$V_1 \cap V_2, (V_1 \cup V_2) - V_1, (V_1 \cup V_2) - V_2$，每一种情况都会导致 V_1 或者（此处是同或不是异或）V_2 不是子空间，与假设冲突。

习题 13，既然作者都说难我就不搞了……实际上你去问 deepseek 会得到一个很不错的答案（包括只有两个元素的循环域）

习题 14，$\{[x+y, x-y, 2(x+y)] \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\}$，$U+W$ 的第一个坐标是两数之和，第二个坐标是第一个坐标涉及的两数之差，第三个坐标则是第一个坐标的两倍

习题 15，依然是 U

习题 16，自然。这是依赖于向量加法的可交换性。

习题 17，自然。

习题 18，$\{0\}$ 就是恒等元，只有 $\{0\}$ 有加法逆元，反证法即可。

习题 19，假设有 $v_1 \in V_1$ 满足 $v_1 \not\in V_2$，那么 $v_1 + u \in U + V_2$ 意味着要么 $v_1 \in V_2$，要么 $v_1 + u \in U$，前一个可能性导向题目假设的正确性，后一个可能性意味着 $v_1 \in U$，其实就是 $(V_1 \cup V_2) - V_1 \subset U$ 和 $(V_1 \cup V_2) - V_2 \subset U$，那么题目的关键就是子空间 U 中是否有两个相交为空集的子空间。

感觉应该是有的，那么给出反例：$U = \mathbb{R}^2$，$V_1 = (0, a)$，$V_2 = (a, 0)$（我去这么显然，喵的）

习题 20，显然就是 (0,a,b,0)

习题 21，(0,0,a,b,c) 即可，这种构造让 $(0, 0, a, b, c)$ 根本管不到前两个维度，因此若想得到 0 只能让 $x = y = 0$，而这又会得出 $a = b = c = 0$，因此得到 0 的方式只有一种。

习题 22，显然就是 (0,0,a,0,0)，(0,0,0,b,0)，(0,0,0,0,c)

习题 23，$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 = v$，由于题中给的是直和，那么假设 $V_1 = V_2$，我们的等式就只能有 $v_1 = v_2, u_1 = u_2$，然而假设 $V_1 \neq V_2$，那么就有 $v_1, v_2 \not\in V_1 \cap V_2$（否则与直和冲突），根据这个我们推出 $v_1 \not\in V_2$ 且 $v_2 \not\in V_1$，另有假设的变式 $v_1 = v_2 + (u_2 - u_1)$ 和 $v_2 = v_1 + (u_1 - u_2)$，由于 $V_1 \oplus U = V$ 是直和，所以 $u_2 - u_1 \not\in V_1$，假设 $u_2 - u_1 \in V_2$ 就支持 $V_1 = V_2$ 的假设了，所以我们假设 $u_2 - u_1 \not\in V_1 \cup V_2$。

其实到这里我就意识到可能证明不了了，于是问了 deepseek，很简单地就有一个反例：$U = (x, 0), V_1 = (y, y), V_2 = (z, -z)$

哈哈，我……喵的，潜意识偷懒了，陷进习题 20~22 里了。

习题 24，所有奇函数+所有偶函数可以得到所有函数（且唯一），首先是零函数的唯一表示，一个不为零的奇函数显然是不能被一个偶函数消成零函数的。其次是奇函数+偶函数的表示能力，只要证明 $x + y = a_1$ 且 $x - y = a_2$ 对任意 a_1, a_2 均有 x, y 可供选择即可（因为对零点处的数值显然是成立的），这个方程组的解还挺显然的，所以题目的命题得证。